ДРАГОСЛАВ С. МИТРИНОВИЋ

ПОСТУПАК ЗА ФОРМИРАЊЕ КРИТЕРИЈУМА ИНТЕГРАБИЛИТЕТА ЛИНЕАРНИХ ДИФЕРЕНЦИЈАЛНИХ ЈЕДНАЧИНА ЧИЈИ КОЕФИЦИЈЕНТИ ИМАЈУ ОБЛИКЕ УНАПРЕД ДАТЕ

(Примљено 29 децембра 1949 год.)

ДРАГОСЛАВ С. МИТРИНОВИЋ

ПОСТУПАК ЗА ФОРМИРАЊЕ КРИТЕРИЈУМА ИНТЕГРАБИЛИТЕТА ЛИНЕАРНИХ ДИФЕРЕНЦИЈАЛНИХ ЈЕДНАЧИНА ЧИЈИ КОЕФИЦИЈЕНТИ ИМАЈУ ОБЛИКЕ УНАПРЕД ДАТЕ

УВОД

1. Линеарне диференцијалне једначине играју важну улогу у многобројним техничким, физичким и астрономским проблемима. Стога је проучавању тих једначина посвећена изванредна пажња. О линеарним једначинама постоје специјални уџбеници[1]) и приручници[2]). Неке линеарне једначине специјалног типа, које су од већег значаја у теориским и практичним питањима, изазвале су такав интерес, да о њима данас постоји богата литература. Такве су, на пример, диференцијалне једначине:

1° Bessel-ова једначина[3]):

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - \nu^2) y = 0 \tag{1}$$

$$(\nu = \mathrm{Const});$$

---

[1]) *Видети*, на пример,

L. Hefter, *Einleitung in die Theorie der linearen Differentialgleichungen mit einer unabhängigen Variablen*, Teubner, Leipzig, 1894, XIV+258 S.

[2]) *Видети*, на пример,

L. Schlesinger, *Handbuch der Theorie der linearen Differentialgleichungen*, Bd. I (1895), XX+486 S., Bd. II_1 (1897), XVIII+532 S., Bd. II_2 (1898), XIV+446 S., Leipzig, Teubner.

[3]) *Видети*, на пример,

E. Kamke, *Differentialgleichungen: Lösungsmethoden und Lösungen*, Bd. I: Gewöhnliche Differentialgleichungen, 3. Auflage, Leipzig, 1944, S. 437, Gl. 2.162.

Ово дело биће у будуће цитирано укратко са Kamke I. Ознака S. 437, Gl. 2.162 значи да се односна једначина налази на страни 437 и да је нумерисана са 2.162.

2⁰ Hill-ова једначина[1]):

$$y'' + [\Phi(x) + \lambda]\, y = 0, \tag{2}$$

где је

$$\lambda = \text{Const},$$

$$\Phi = \text{периодична функција промењиве } x;$$

3⁰ Хипергеометриска једначина[2]):

$$x(x-1)\, y'' + [(\alpha + \beta + 1)\, x - \gamma]\, y' + \alpha\beta y = 0 \tag{3}$$

$$(\alpha, \beta, \gamma = \text{Const});$$

4⁰ Legendre-ова једначина[3]);

$$(x^2 - 1)\, y'' + 2xy' - \nu(\nu + 1)\, y = 0 \tag{4}$$

$$(\nu = \text{Const});$$

5⁰ Laplace-ова једначина[4]):

$$(a_2 x + b_2)\, y'' + (a_1 x + b_1)\, y' + (a_0 x + b_0)\, y = 0 \tag{5}$$

$$(a_\nu,\ b_\nu = \text{Const});$$

6⁰ Weber-ова једначина[5]):

$$4y'' = (x^2 + a)\, y \tag{6}$$

$$(a = \text{Const});$$

7⁰ Mathieu-ова једначина[6]):

$$y'' + (a \cos 2x + b)\, y = 0 \tag{7}$$

$$(a,\ b = \text{Const});$$

8⁰ Lamé-ова једначина[7]):

$$y'' + (a\, sn^2 x + b)\, y = 0 \tag{8}$$

$$(a, b = \text{Const});$$

9⁰ Конфлуентна хипергеометриска једначина[8])

$$xy'' + (b - x)\, y' - ay = 0 \tag{9}$$

$$(a, b = \text{Const}).$$

---

1) Kamke I, S. 410, Gl. 2.30.
2) Kamke I, S. 465, Gl. 2.260.
3) Kamke I, S. 455, Gl. 2.240.
4) Kamke I, S. 434, Gl. 2.145.
5) Kamke I, S. 421, Gl. 2.87.
6) Kamke I, S. 404, Gl. 2.22.
7) Kamke I, S. 410, Gl. 2.27.
8) Kamke I, S. 427, Gl. 2.113.

2. Kamke ова збирка[1]) која садржи преко 1600 обичних диференцијалних једначина, поређаних лексиграфски, даје преглед до сада познатих резултата у математичкој литератури о тим једначинама.

Анализирајући наведену збирку, закључује се да она има великих празнина, чак и у случају када се ради о линеарним диференцијалним једначинама којима је посвећена огромна литература.

Тако, на пример, посматрајмо диференцијалну једначину

$$y'' + (ax + b)\, y' + (\alpha x^2 + \beta x + \gamma)\, y = 0, \tag{10}$$

где су a, b, α, β, γ ма какве константе.

У случају када је

$$\alpha = 0,$$

једначина (10) припада типу Laplace-ових једначина (5).

У Kamke-овој збирци налазе се о једначини (10) ови подаци:

1° Сменом[2])

$$y = u(x)\, exp(sx^2),$$

где је s решење једначине

$$4s^2 + 2as + \alpha = 0,$$

диференцијална једначина (10) добија вид

$$u'' + [(a + 4s)\, x + b]\, u' \tag{11}$$
$$+ [(\beta + 2bs)\, x + (\gamma + 2s)]\, u = 0.$$

Ова једначина спада у класу Laplace-ових једначина (5). Тиме је успостављена веза између једначине (10) и Laplace-ове једначине типа:

$$y'' + (ax + b)\, y' + (Ax + B)\, y = 0.$$

2° Специјални облик једначине (10) јесте Craig-ова једначина[2]):

$$y'' - 2\,(ax + b)\, y' + [(ax + b)^2 - a]\, y = 0, \tag{12}$$

чије је опште решење

$$y = K_1\, y_1 + K_2\, y_2$$

$$(K_1, K_2 = \text{интеграционе константе}),$$

[1]) Kamke I, S. 289—630 (одељак: *C. Einzel-Differentialgleichungen*).
[2]) Kamke I, S. 417, Gl. 2.55.

где је

$$y_1 = exp\left(\frac{a}{2}x^2 + bx\right),$$

$$y_2 = y_1'.$$

3⁰ Партикуларни случај једначине (10) јесте Forsyth-Jacobsthal-ов пример:

$$y'' + 2\,a\,x\,y' + a^2\,x^2\,y = 0. \tag{13}$$

Ова се једначина интеграли помоћу квадратура[1]).

4⁰ Једначине

$$y'' + 4\,xy' + (4\,x^2 + 2)\,y = 0, \tag{14}$$

$$y'' - 4\,xy' + (4\,x^2 - 1)\,y = 0, \tag{15}$$

$$y'' - 4\,xy' + (4\,x^2 - 2)\,y = 0, \tag{16}$$

$$y'' - 4\,xy' + (4\,x^2 - 3)\,y = 0 \tag{17}$$

припадају типу (10) и све су оне интеграбилне[2]).

5⁰ Једначина[3])

$$y'' - 4\,xy' + (3\,x^2 + 2n - 1)\,y = 0, \tag{18}$$

сменом

$$y = e^{x^2}\,u(x),$$

постаје

$$u'' - (x^2 - 2n - 1)\,u = 0$$

и припада класи Weber-ових једначина[4])

$$u'' - (x^2 + a)\,u = 0.$$

6⁰ Једначина[5])

$$y'' - (a^2\,x^2 + a)\,y = 0 \tag{19}$$

као и њен специјални случај[6])

$$y'' - (x^2 + 1)\,y = 0 \tag{20}$$

јесу интеграбилне.

---

1) Kamke I, S. 416, Gl. 2.53.
2) Kamke I, S. 415, Gl. 2.47; S. 416, Gl. 2.49; Gl. 2.50; Gl. 2.51.
3) Kamke I, S. 415, Gl. 2.48.
4) Kamke I, S. 400, Gl. 2.12.
5) Kamke I, S. 401, Gl. 2.13.
6) Kamke I, S. 400, Gl. 2.11

Исти је случај и са једначином

$$y'' - (x^2 + 3) y = 0 \tag{21}$$

коју је интегралио Goldscheider[1]).

7^0 Једначина[2])

$$y'' + xy' + (bx^2 + a) y = 0 \tag{22}$$

интеграбилна је у ова два случаја:

$$b = \frac{1}{4}, \qquad a \neq \frac{1}{2} \quad \text{(Kamke-ов случај);}$$

$$b = \frac{1}{4}, \qquad a = \frac{1}{2} \quad \text{(Goldscheider-ов случај).}$$

3. Из изнетог се види да је интеграција једначине (10) помоћу квадратура позната у малом броју случајева. Стога је од интереса тражити нове критеријуме интеграбилитета те једначине.

У овој расправи наводимо доста опште случајеве у којима је једначина (10) интеграбилна и показујемо да готово све једначине наведене у § 2 имају *заједничку особину: да се могу свести на систем једначина облика*

$$\begin{aligned} &\frac{dy}{dx} + (\lambda_1 x + \mu_1) y = z, \\ &\frac{dz}{dx} + (\lambda_2 x + \mu_2) z = 0, \end{aligned} \tag{23}$$

где су

$$\lambda_1, \ \lambda_2, \ \mu_1, \ \mu_2$$

константе које ћемо одредити.

4. У овој расправи дајемо један поступак за формирање интеграбилних линеарних једначина **одређеног типа,** на пример (10). Тај поступак који је општијег карактера састоји се у овоме.

Посматрајмо линеарну диференцијалну једначину реда n, одређеног типа,

$$\varphi_0(x) y^{(n)} + \varphi_1(x) y^{(n-1)} + \cdots + \varphi_{n-1}(x) y' + \varphi_n(x) y = 0, \tag{24}$$

тј. једначину (24) у којој су облици функција

$$\varphi_0, \ \varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1}, \ \varphi_n$$

дати унапред.

---

[1]) Kamke I, S. 640, Gl. 2.11a

[2]) Kamke I, S. 641, Gl. 2.63a

Упоредо са једначином (24) уочимо систем линеарних једначина првог реда:

$$
\begin{aligned}
&f_{11}\,y' + f_{12}\,y = y_1,\\
&f_{21}\,y_1' + f_{22}\,y_1 = y_2,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&f_{k1}\,y'_{k-2} + f_{k2}\,y_{k-2} = y_{k-1},\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&f_{n-1,1}\,y'_{n-2} + f_{n-1,2}\,y_{n-2} = y_{n-1},\\
&f_{n1}\,y'_{n-1} + f_{n2}\,y_{n-1} = 0,
\end{aligned}
\tag{25}
$$

где су f_{kj} функције од x које задовољавају ове услове:

1^0 $f_{k1} \neq 0$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$;

2^0 функције f_{kj} $(k = 1, 2, \ldots, n;\ \ j = 1, 2)$ јесу непрекидне у посматраном интервалу независно променљиве;

3^0 егзистирају изводи

$$f'_{kj} = \frac{df_{kj}}{dx}$$

$$f''_{kj} = \frac{d^2 f_{kj}}{dx^2}$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$(k = 1, 2, \ldots, n;\quad j = 1, 2)$$

који се појављују у формулама.

Ако се из система (25) елиминише $(n - 1)$ функција

$$y_1,\ y_2, \ldots, y_{n-1},$$

добија се линеарна диференцијална једначина реда n:

$$\Phi_0(x)\,y^{(n)} + \Phi_1(x)\,y^{(n-1)} + \cdots + \Phi_{n-1}(x)\,y' + \Phi_n(x)\,y = 0, \tag{26}$$

у којој коефицијенти $\Phi_\nu(x)$ претстављају полиноме по функцијама

$$f_{kj} \qquad (k = 1, 2, \ldots, n;\quad j = 1, 2)$$

и по њиховим изводима

$$\frac{df_{kj}}{dx},\ \frac{d^2 f_{kj}}{dx^2}, \ldots, \frac{d^{n-1} f_{kj}}{dx^{n-1}}.$$

Подесним избором облика функција

$$f_{kj} \qquad (k = 1, 2, \ldots, n;\quad j = 1, 2)$$

могу се конструисати такве једначине (26) које ће улазити у класу једначина (24) која је унапред дата.

Диференцијалне једначине (26), класе (24), добијене на наведени начин биће *интеграбилне*, јер је систем диференцијалних једначина (25) интеграбилан за ма какав облик функција

$$f_{kj}(x) \qquad (k=1,2,\ldots,n; \quad j=1,2)$$

уз раније наведена ограничења која се односе на непрекидност и егзистенцију извода тих функција.

Једначина (26) која је формирана по описаном поступку има за партикуларно решење функцију:

$$exp\left(-\int \frac{f_{12}}{f_{11}}\,dx\right).$$

Систем (25) се интеграли на тај начин што се, полазећи од последње између једначина (25), прво нађе y_{n-1}, затим y_{n-2}, итд. и најзад y.

За диференцијалну једначину (24) која је еквивалентна систему линеарних једначина (25) каже се да је сводљива[1]) (réductible).

Наведеним поступком могу се у знатној мери попунити празнине у Kamke-овој збирци диференцијалних једначина. Већ из тог разлога, поступак о коме је овде реч претставља известан интерес.

Глава прва

КРИТЕРИЈУМИ ИНТЕГРАБИЛИТЕТА ЈЕДНАЧИНЕ

$$y''+(ax+b)\,y'+(\alpha x^2+\beta x+\gamma)\,y=0.$$

5. Упоредо са овом диференцијалном једначином посматрајмо систем линеарних једначина

$$\begin{aligned} f(x)\,y'+g(x)\,y&=z, \\ z'+h(x)\,z&=0 \end{aligned} \tag{27}$$

[1]) О општем појму *сводљивости* (réductibilité) видети, на пример P. Painlevé, *Leçons sur la théorie analytique des équations différentielles*, professées à Stockholm, Paris, 1897, p. 487;
E. Goursat, *Propriétés générales de l'équation* d'Euler *et de* Gauss, Actualités scientifiques et industrielles, fasc. 333, 1936 (Paris, Hermann), p. 70.

који је интеграбилан за ма какве облике функција[1]):

$$f(x) \neq 0, \quad g(x), \quad h(x).$$

Елиминацијом z из система (27) добија се:

$$f y'' + (f' + g + f h) y' + (g' + g h) y = 0. \tag{28}$$

Један довољан услов да би једначина (28) била типа (10) јесте:

$$\begin{aligned} f(x) &\equiv 1, \\ g(x) &\equiv \lambda_1 x + \mu_1, \\ h(x) &\equiv \lambda_2 x + \mu_2, \end{aligned} \tag{29}$$

где су λ_1, λ_2, μ_1, μ_2 ма какве константе.

Једначина (28), према (29), постаје:

$$\begin{aligned} y'' &+ [(\lambda_1 + \lambda_2) x + (\mu_1 + \mu_2)] y' \\ &+ [\lambda_1 \lambda_2 x^2 + (\lambda_1 \mu_2 + \lambda_2 \mu_1) x + (\mu_1 \mu_2 + \lambda_1)] y = 0. \end{aligned} \tag{30}$$

Поређењем једначина (10) и (30) добивају се релације:

$$\lambda_1 + \lambda_2 = a, \tag{31}$$

$$\lambda_1 \lambda_2 = \alpha, \tag{32}$$

$$\mu_1 + \mu_2 = b, \tag{33}$$

$$\mu_1 \mu_2 + \lambda_1 = \gamma, \tag{34}$$

$$\lambda_1 \mu_2 + \lambda_2 \mu_1 = \beta. \tag{35}$$

Једначине (31), (32), (33), и (34) имају по параметрима

$$\lambda_1, \ \lambda_2, \ \mu_1, \ \mu_2$$

ова четири система решења:

Први систем:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \frac{a + R_1}{2}, \quad & \mu_1 &= \frac{b + R_2}{2}, \\ \lambda_2 &= \frac{a - R_1}{2}, \quad & \mu_2 &= \frac{b - R_2}{2}; \end{aligned} \tag{36}$$

Други систем:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \frac{a + R_1}{2}, \quad & \mu_1 &= \frac{b - R_2}{2}, \\ \lambda_2 &= \frac{a - R_1}{2}, \quad & \mu_2 &= \frac{b + R_2}{2}, \end{aligned} \tag{37}$$

---

[1]) Наведени услови у § 4 о непрекидности тих функција као и о егзистенцији њихових извода и овде се претпостављају.

где R_1 и R_2 имају ове вредности:

$$\begin{aligned} R_1 &= +\sqrt{a^2-4\alpha}, \\ R_2 &= +\sqrt{b^2-4(\gamma-\lambda_1)} \\ &= +\sqrt{b^2-4\gamma+2a+2R_1}; \end{aligned} \tag{38}$$

Трећи систем:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \frac{a-R_1}{2}, \quad \mu_1 = \frac{b+R_3}{2}, \\ \lambda_2 &= \frac{a+R_1}{2}, \quad \mu_2 = \frac{b-R_3}{2}; \end{aligned} \tag{39}$$

Четврти систем:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \frac{a-R_1}{2}, \quad \mu_1 = \frac{b-R_3}{2}, \\ \lambda_2 &= \frac{a+R_1}{2}, \quad \mu_2 = \frac{b+R_3}{2}, \end{aligned} \tag{40}$$

где је R_1 напред дефинисани израз, а R_3 израз облика:

$$\begin{aligned} R_3 &= +\sqrt{b^2-4(\gamma-\lambda_1)} \\ &= +\sqrt{b^2-4\gamma+2a-2R_1}. \end{aligned} \tag{41}$$

Када се у релацији (35) замене, једна за другом, вредности (36), (37), (39) и (40), добијају се респективно ове релације:

$$ab-R_1R_2=2\beta, \tag{42}$$

$$ab+R_1R_2=2\beta, \tag{43}$$

$$ab+R_1R_3=2\beta, \tag{44}$$

$$ab-R_1R_3=2\beta. \tag{45}$$

6. Увођење параметра p помоћу релације

$$\alpha = -p(a+p)$$

има за ефекат да R_1 добије прост облик

$$R_1 = a+2p \tag{46}$$

и тада се корен R_2 може написати овако:

$$R_1 = \sqrt{b^2-4(\gamma-a-p)}.$$

Увођењем једног новог параметра q помоћу релације

$$\gamma - a - p = -q(b+q),$$

корен R_2 добија исто тако једноставан облик:

$$R_2 = b + 2q. \tag{47}$$

Системи решења (36) и (37) — први и други систем, с обзиром на (46) и (47), узимају респективно ове просте форме:

Први систем:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= a - p, & \mu_1 &= b + q, \\ \lambda_2 &= -p, & \mu_2 &= -q; \end{aligned} \tag{48}$$

Други систем:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= a + p, & \mu_1 &= -q, \\ \lambda_2 &= -p, & \mu_2 &= b + q. \end{aligned} \tag{49}$$

Услови (42) и (43) постају респективно:

$$-bp - aq - 2pq = \beta, \tag{50}$$

$$ab + bp + aq + 2pq = \beta. \tag{51}$$

На основу наведених чињеница, могу се формулисати следећа два става:

Став I. *Диференцијална једначина*

$$y'' + (ax + b)\,y' + (\alpha x^2 + \beta x + \gamma)\,y = 0, \tag{52}$$

у случају када је

$$\begin{aligned} \alpha &= -p\,(a + p), \\ \beta &= -aq - bp - 2pq \\ &= -p\,(b + q) - q\,(a + p), \\ \gamma &= a + p - q\,(b + q), \end{aligned} \tag{53}$$

$(a,\ b,\ p,\ q =$ произвољни параметри),

сводљива је на интеграбилан систем линеарних једначина

$$\begin{aligned} & y' + [(a + p)\,x + (b + q)]\,y = z, \\ & z' - (px + q)\,z = 0. \end{aligned} \tag{54}$$

Став II. *Диференцијална једначина* (52), *у којој је:*

$$\begin{aligned} \alpha &= -p\,(a + p), \\ \beta &= ab + bp + aq + 2pq \\ &= (a + p)\,(b + q) + pq, \\ \gamma &= a + p - q\,(b + q), \end{aligned} \tag{55}$$

$(a,\ b,\ p,\ q =$ произвољни параметри), *своdљива је на интеграбилан систем линеарних једначина:*

$$\begin{aligned} &y' + [(a+p)\,x - q]\,y = z, \\ &z' + [-px + (b+q)]\,z = 0. \end{aligned} \tag{56}$$

7. С обзиром на израз R_1, дефинисан формулом (46), корен R_3 дат релацијом (41) постаје

$$R_3 = \sqrt{b^2 - 4\,(\gamma + p)}\,.$$

Ако се овде стави

$$\gamma + p = -q\,(b+q),$$

где је q један параметар, има се:

$$R_3 = b + 2\,q\,. \tag{57}$$

Системи (39) и (40) — трећи и четврти систем, добијају респективно ове облике:

Трећи систем:

$$\begin{aligned} &\lambda_1 = -p, \qquad &&\mu_1 = b+q, \\ &\lambda_2 = a+p, &&\mu_2 = -q; \end{aligned} \tag{58}$$

Четврти систем:

$$\begin{aligned} &\lambda_1 = -p, \qquad &&\mu_1 = -q, \\ &\lambda_2 = a+p, &&\mu_2 = b+q\,. \end{aligned} \tag{59}$$

Услови (44) и (45) постају респективно:

$$ab + bp + aq + 2\,pq = \beta, \tag{60}$$

$$-aq - bp - 2\,pq = \beta\,. \tag{61}$$

На основу претходних резултата могу се исказати ова два става:

Став III. *Диференцијална једначина*

$$y'' + (ax+b)\,y' + (\alpha x^2 + \beta x + \gamma)\,y = 0, \tag{62}$$

где је:

$$\begin{aligned} \alpha &= -p\,(a+p), \\ \beta &= ab + bp + aq + 2\,pq \\ &= (a+p)\,(b+q) + pq, \\ \gamma &= -p - q\,(b+q) \end{aligned} \tag{63}$$

(a, b, p, q = произвољни параметри) *може се свести на интеграбилан систем линеарних једначина:*

$$\begin{aligned} y' + [-px + (b+q)]\, y &= z, \\ z' + [(a+p)\, x - q]\, z &= 0. \end{aligned} \tag{64}$$

Став IV. *Диференцијална једначина* (62), *у којој је:*

$$\begin{aligned} \alpha &= -p\,(a+p), \\ \beta &= -aq - bp - 2pq \\ &= -p\,(b+q) - q\,(a+p), \\ \gamma &= -p - q\,(b+q), \end{aligned} \tag{65}$$

сводљива је на интеграбилан систем линеарних једначина облика:

$$\begin{aligned} y' - (px + q)\, y &= z, \\ z' + [(a+p)\, x + (b+q)]\, z &= 0. \end{aligned} \tag{66}$$

8. У наведеним ставовима интеграција једначине (10), под извесним условима, сведена је на интеграцију система линеарних једначина облика:

$$\begin{aligned} y' + (\lambda_1 x + \mu_1)\, y &= z, \\ z' + (\lambda_2 x + \mu_2)\, z &= 0. \end{aligned} \tag{67}$$

Из последње једначине излази:

$$z = K_1\, e^{-\frac{1}{2}\lambda_2 x^2 - \mu_2 x}.$$

Прва једначина даје

$$\begin{aligned} y &= K_2\, e^{-\frac{1}{2}\lambda_1 x^2 - \mu_1 x} \\ &+ K_1\, e^{-\frac{1}{2}\lambda_1 x^2 - \mu_1 x} \int exp\left[\frac{\lambda_1 - \lambda_2}{2}\, x^2 + (\mu_1 - \mu_2)\, x\right] dx, \end{aligned} \tag{68}$$

где су K_1 и K_2 интеграционе константе.

Посматрајмо интеграл

$$J(x, \lambda_1, \lambda_2, \mu_1, \mu_2) = \int exp\left[\frac{\lambda_1 - \lambda_2}{2}\, x^2 + (\mu_1 - \mu_2)\, x\right] dx,$$

и наведемо ове његове партикуларне случајеве:

$$J\,(x, \lambda_1, \lambda_1, \mu_1, \mu_2) = \frac{1}{\mu_1 - \mu_2}\, e^{(\mu_1 - \mu_2)\, x} \qquad (\mu_1 \neq \mu_2);$$

$$J\,(x, \lambda_1, \lambda_1, \mu_1, \mu_1) = x.$$

За случај:

$$\lambda_1 = \lambda_2, \quad \mu_1 \neq \mu_2,$$

опште решење (68) добија облик

$$y = K_2 e^{-\frac{1}{2}\lambda_1 x^2 - \mu_1 x} + K_1 e^{-\frac{1}{2}\lambda_1 x^2 - \mu_2 x} \tag{69}$$

где је место $\dfrac{1}{\mu_1 - \mu_2} K_1$ стављено K_1.

Када је

$$\lambda_1 = \lambda_2, \quad \mu_1 = \mu_2,$$

опште решење (68) добија једноставан облик

$$y = (K_1 x + K_2)\, exp\left(-\frac{\lambda_1}{2} x^2 - \mu_1 x\right). \tag{70}$$

9. Craig-ова једначина (12) сводљива је на систем:

$$\begin{aligned} y' - (ax + b)\, y &= z, \\ z' - (ax + b)\, z &= 0. \end{aligned} \tag{71}$$

Forsyth-Jacobsthal-ова једначина (13) своди се на систем:

$$\begin{aligned} y' + (ax + \sqrt{a})\, y &= z, \\ z' + (ax - \sqrt{a})\, z &= 0. \end{aligned} \tag{72}$$

Диференцијалне једначине (14), (15), (16) и (17) сводљиве су респективно на системе једначина:

$$\left.\begin{aligned} y' + 2\, xy &= z, \\ z' + 2\, xz &= 0; \end{aligned}\right\} \tag{73}$$

$$\left.\begin{aligned} y' - (2\, x - i)\, y &= z, \\ z' - (2\, x + i)\, z &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{74}$$

$$(i = \sqrt{-1});$$

$$\left.\begin{aligned} y' - 2\, xy &= z, \\ z' - 2\, xz &= 0; \end{aligned}\right\} \tag{75}$$

$$\left.\begin{aligned} y' - (2\, x - 1)\, y &= z, \\ z' - (2\, x + 1)\, z &= 0\,. \end{aligned}\right\} \tag{76}$$

Једначина

$$y'' - 4xy' + (4x^2 + k) = 0 \tag{77}$$
$$(k = \text{const})$$

која обухвата једначине (15), (16) и (17), као партикуларне случајеве, сводљива је на систем

$$\begin{aligned} y' - (2x - \sqrt{-k-2})\,y &= z, \\ z' - (2x + \sqrt{-k-2})\,z &= 0. \end{aligned} \tag{78}$$

10. Посматрајмо сада једначину

$$y'' + xy' + (\alpha x^2 + \gamma)\,y = 0 \tag{79}$$

која је партикуларни случај једначине (10), када је:

$$a = 1, \quad b = 0, \quad \beta = 0.$$

Ако је

$$\alpha = \frac{1}{4}, \quad \gamma = \frac{1}{2},$$

Goldscheider[1]) је показао да је опште решење једначине (79)

$$y = (C_1 + C_2 x)\, e^{-\frac{x^2}{4}} \tag{80}$$

$(C_1,\ C_2 =$ константе интеграције$)$.

Kamke[2]) је утврдио да се једначина (79) интеграли такође и у случају када је:

$$\alpha = \frac{1}{4}, \quad \gamma \neq \frac{1}{2};$$

тада опште решење гласи:

$$y = e^{-\frac{x^2}{4}} \left[C_1\, exp\left(x \sqrt{\frac{1}{2} - \gamma} \right) + C_2\, exp\left(-x \sqrt{\frac{1}{2} - \gamma} \right) \right], \tag{81}$$

где фигуришу две произвољне константе C_1 и C_2.

Показаћемо сада да једначина (79) има и других случајева интеграбилитета осим оних које су навели Goldscheider и Kamke.

[1]) Kamke I, S. 641, Gl. 2.51a (код Kamke-а штампарска грешка: тамо стоји 2.41a).

[2]) *Видети* претходну примедбу.

Први став, примењен на једначину (79), даје:

$$\begin{aligned} \alpha &= -p(1+p), \\ \beta &= -q-2pq=0, \\ \gamma &= 1+p-q^2. \end{aligned} \tag{82}$$

У вези са решавањем система (82) разликоваћемо два случаја:

$$1^0 \quad q=0; \qquad 2^0 \quad p=-\frac{1}{2}.$$

Ако је $q=0$, према (82), има се:

$$\begin{aligned} \alpha &= -p(1+p), \\ \gamma &= 1+p, \end{aligned} \tag{83}$$

или, после елиминације параметра p,

$$\gamma^2-\gamma+\alpha=0. \tag{84}$$

Ако коефицијенти α и γ једначиче (79) задовољавају услов (84), односно (83), тада се једначина (79) може интегралити по нашој методи, тј. она је своддљива на систем:

$$\begin{aligned} y'+(1+p)xy &= z, \\ z'-pxz &= 0 \end{aligned} \tag{85}$$

који је интеграбилан за ма какво p.

За $\alpha=\frac{1}{4}$, једначина (84) има двојни корен $\gamma=\frac{1}{2}$. Тако смо добили Goldscheider-ов случај као партикуларни случај нашег резултата.

2^0 Када је $p=-\frac{1}{2}$, релације (82) дају:

$$\alpha=\frac{1}{4}, \qquad \gamma=\frac{1}{2}-q^2. \tag{86}$$

То је управо случај интеграбилитета који је навео Kamke.

За вредности (86) једначина (79) своддљива је на систем:

$$\begin{aligned} y'+\left(\frac{1}{2}x+\sqrt{\frac{1}{2}-\gamma}\right)y &= z, \\ z'+\left(\frac{1}{2}x-\sqrt{\frac{1}{2}-\gamma}\right)z &= 0. \end{aligned} \tag{87}$$

Овај систем даје за y решење у коначном облику (случај $\lambda_1=\lambda_2$, $\mu_1\neq\mu_2$ дискутован у § 8) које је идентично са Kamke-овим (81).

На основу изложеног видимо да је једначина (79) интеграбилна ако између α и γ постоји веза

$$\alpha = \gamma - \gamma^2. \tag{88}$$

Према томе, *диференцијална једначина*

$$y'' + xy' + [(\gamma - \gamma^2)\, x^2 + \gamma]\, y = 0$$

$$(\gamma = \text{произвољна константа})$$

може се интегралити помоћу квадратура.

Уочимо, на пример, једначину

$$y'' + xy' - (6\, x^2 + 3)\, y = 0 \tag{89}$$

која не спада у случај Kamke-ов, јер је овде

$$\gamma = -3$$

и, према (88),

$$\alpha = -6.$$

Једначина (89) сводљива је на интеграбилан систем:

$$y' + 3\, xy = z,$$
$$z' - 2\, xz = 0.$$

За $\gamma = 4$, из (88) излази $\alpha = -12$.

Према томе, једначина

$$y'' + xy' + (4 - 12\, x^2)\, y = 0$$

сводљива је на интеграбилан систем:

$$y' + 4\, xy = z$$
$$z' - 3\, xz = 0.$$

Ако бисмо пошли од ставова II, III, IV, дошли бисмо до потпуно истих закључака као и горе у вези са интеграцијом једначине (79).

11. Применићемо изведене ставове за изналажење критеријума интеграбилитета једначине

$$y'' + (ax + b)\, y' + (cx + d)\, y = 0 \tag{90}$$

која спада у класу Laplace-ових једначина (5).

Једначина (90) истовремено је партикуларан случај једначине

$$y'' + (ax + b)\, y' + (\alpha x^2 + \beta x + \gamma)\, y = 0 \tag{91}$$

коју проучавамо у овој глави.

Поређењем једначина (90) и (91) имамо:

$$\alpha = 0, \quad \beta = c, \quad \gamma = d.$$

Применимо редом ставове I, II, III, IV на једначину (90). Став I даје условне једначине:

$$\begin{aligned} \alpha &\equiv -p\,(a+p) = 0, \\ \beta &\equiv -p\,(b+q) - q\,(a+p) = c, \\ \gamma &\equiv a + p - q\,(b+q) = d. \end{aligned} \tag{92}$$

С обзиром на прву од једначина (92), треба разликовати два случаја:

$$1^0 \quad p = 0; \qquad 2^0 \quad p = -a.$$

Ако је $p = 0$, систем (92) даје:

$$\begin{aligned} aq + c &= 0, \\ a - q\,(b+q) &= d. \end{aligned} \tag{93}$$

Претпоставићемо да је $a \neq 0$, јер би $a = 0$ повукло за собом $c = 0$ и тада би се једначина (90) свела на линеарну једначину са сталним коефицијентима.

Елиминацијом q из (93) добија се

$$d = a - \frac{c^2}{a^2} + \frac{bc}{a}. \tag{94}$$

Свака Laplace-ова једначина типа (90) чији коефицијенти задовољавају услов (94) сводљива је на интеграбилан систем једначина

$$y' + \left(ax + b - \frac{c}{a}\right) y = z,$$

$$z' + \frac{c}{a} z = 0.$$

Према томе, услов (94) јесте један критеријум интеграбилитета једначине (90).

За $p = -a$, систем (92) се своди на:

$$\begin{aligned} a\,(b+q) &= c, \\ -q\,(b+q) &= d. \end{aligned} \tag{95}$$

Елиминацијом q из система (95) налази се:

$$d = \frac{c\,(ab-c)}{a^2}. \tag{96}$$

Када је услов (96) задовољен, једначина (90) је интеграбилна и сводљива на систем линеарних једначина који је лако образовати.

Применом ставова II, III, IV на једначину (90) не би се дошло до других услова критеријума интеграбилитета ван оних који су дати под (94) и (96).

О једначини (90) Kamke[1]) даје овај резултат:

Сменом промењљивих

$$y(x) = \eta(x)\, exp\left(-\frac{c}{a}x\right)$$

$$\xi = \sqrt{|a|}\left(x + \frac{ab-2c}{a^2}\right)$$

једначина (90) постаје

$$\eta'' \pm \xi\eta' \pm a^{-3}(c^2 - abc + a^2 d)\eta = 0, \tag{97}$$

где горњи знаци одговарају случају $a>0$, а доњи случају $a<0$.

На основу једначине (97) може се извести закључак, да је једначина (90) интеграбилна ако је задовољен услов:

$$c^2 - abc + a^2 d = 0,$$

што је у складу са критеријумом (96) који смо извели на основу наше методе.

И критеријум интеграбилитета (94) који смо горе извели може се добити на други начин. Заиста, пођимо од једначине

$$\eta'' + \xi\eta' + \eta = 0 \tag{98}$$

чији је општи интеграл[2])

$$\eta = e^{-\frac{1}{2}\xi^2}\left(K_1 + K_2\int e^{\frac{1}{2}\xi^2}\, d\xi\right),$$

где су K_1 и K_2 интеграционе константе.

За $a>0$, поређењем једначина (97) и (98) долази се до закључка да ће једначина (90) бити интеграбилна ако је

$$a^{-3}(c^2 - abc + a^2 d) = 1,$$

што се поклапа са нашим условом (94), који важи и за $a<0$.

---

1) Kamke I, S. 416, Gl. 2.54.

2) Kamke I, S. 414, Gl. 2.39.

12. У овој глави исцрпно смо изнели примену нашег поступка, који је у уводу (§ 4) само скициран, на истраживање критеријума[1]) интеграбилитета једначине

$$y'' + (ax + b)\, y' + (\alpha x^2 + \beta x + \gamma)\, y = 0. \tag{99}$$

При томе смо констатовали:

1^0 *да се тим поступком могу наћи нови критеријуми интеграбилитета;*

2^0 *да су готово сви познати критеријуми интеграбилитета једначине* (99) *обухваћени, као партикуларни случајеви, ставовима* I–IV;

3^0 *да је ефективна примена поступка веома једноставна и да је тај поступак подесан за конструисање једначина ради попуњавања* Kamke-*ове збирке диференцијалних једначина,*

Пут којим се дошло до резултата за једначину (99) биће углавном исти и када је реч о једначинама другог типа.

Глава друга

КРИТЕРИЈУМИ ИНТЕГРАБИЛИТЕТА ЈЕДНАЧИНЕ

$$y'' + (a\, e^{sx} + b)\, y' + (A\, e^{2sx} + B\, e^{sx} + C)\, y = 0.$$

13. Поставимо сада задатак да, применом нашег поступка нађемо критеријуме интеграбилитета диференцијалне једначине

$$y'' + (a\, e^{sx} + b)\, y' + (A\, e^{2sx} + B\, e^{sx} + C)\, y = 0, \tag{100}$$

---

1) Други критеријуми интеграбилитета једначине (10), осим оних наведених горе, могу се добити ако се пође, на пример, од једначине (28) у којој је

$$f(x) \equiv \prod_{\nu=1}^{\nu=s} (x - k_\nu),$$

$$g(x) \equiv \sum_{\nu=1}^{\nu=s+2} \lambda_\nu x^{s-\nu+2},$$

$$h(x) \equiv \mu_1 x + \mu_2$$

и ако се параметри

$$s,\ k_\nu,\ \lambda_\nu,\ \mu_\nu$$

потчине извесним условима (које овде не износимо) на основу којих се полиноми

$$f' + g + fh, \quad g' + gh$$

(f, g, h имају горе дефинисане изразе) могу поделити полиномом f без остатка. Тада се има један веома генералан критеријум интеграбилитета једначине (10).

где су: s, a, b, A, B, C ма какве константе, уз ова ограничења:

1^0 $s \neq 0$;

2^0 a, A, B нису једновремено једнаки нули.

Систем линеарних једначина који се може довести у кореспонденцију са једначином (100) има облик

$$\begin{aligned} y' + (\lambda_1 e^{sx} + \mu_1) y &= z, \\ z' + (\lambda_2 e^{sx} + \mu_2) z &= 0, \end{aligned} \tag{101}$$

где су

$$\lambda_1, \lambda_2, \mu_1, \mu_2$$

константе.

Елиминацијом z из система (101) налази се:

$$\begin{aligned} y'' + [(\lambda_1 + \lambda_2) e^{sx} + (\mu_1 + \mu_2)] y' \\ + [\lambda_1 \lambda_2 e^{2sx} + (\lambda_1 \mu_2 + \lambda_2 \mu_1 + \lambda_1 s) e^{sx} + \mu_1 \mu_2] y = 0. \end{aligned} \tag{102}$$

После поређења једначина (100) и (102), долази се до система једначина:

$$\begin{aligned} \lambda_1 + \lambda_2 &= a, \\ \lambda_1 \lambda_2 &= A, \\ \mu_1 + \mu_2 &= b, \\ \mu_1 \mu_2 &= C, \\ \lambda_1 \mu_2 + \lambda_2 \mu_1 + \lambda_1 s &= B. \end{aligned} \tag{103}$$

Параметри $\lambda_1, \lambda_2, \mu_1, \mu_2$ дефинисани су једначинама

$$\begin{aligned} \lambda^2 - a\lambda + A &= 0, \\ \mu^2 - b\mu + C &= 0, \end{aligned} \tag{104}$$

које треба решити по λ и μ.

Тако нађени параметри

$$\lambda_1, \lambda_2, \mu_1, \mu_2$$

у функцији од

$$a, b, A, C$$

треба да задовољавају услов

$$\lambda_1 \mu_2 + \lambda_2 \mu_1 + \lambda_1 s = B, \tag{105}$$

а то је пета једначина система (103).

Скуп једначина (104) даје ова четири система решења:

I. *систем:*

$$\lambda_1 = \frac{a+R_1}{2}, \quad \mu_1 = \frac{b+R_2}{2},$$
$$\lambda_2 = \frac{a-R_1}{2}, \quad \mu_2 = \frac{b-R_2}{2}; \tag{106}$$

II. *систем:*

$$\lambda_1 = \frac{a+R_1}{2}, \quad \mu_1 = \frac{b-R_2}{2},$$
$$\lambda_2 = \frac{a-R_1}{2}, \quad \mu_2 = \frac{b+R_2}{2}; \tag{107}$$

III. *систем:*

$$\lambda_1 = \frac{a-R_1}{2}, \quad \mu_1 = \frac{b+R_2}{2},$$
$$\lambda_2 = \frac{a+R_1}{2}, \quad \mu_2 = \frac{b-R_2}{2}; \tag{108}$$

IV. *систем:*

$$\lambda_1 = \frac{a-R_1}{2}, \quad \mu_1 = \frac{b-R_2}{2},$$
$$\lambda_2 = \frac{a+R_1}{2}, \quad \mu_2 = \frac{b+R_2}{2}, \tag{109}$$

где је

$$R_1 = +\sqrt{a^2-4A},$$
$$R_2 = +\sqrt{b^2-4C}. \tag{110}$$

Вредностима (106), (107), (108), (109) одговарају респективно ови услови које морају да задовољавају параметри што се јављају у једначини (100):

$$s(a+R_1)+ab-R_1R_2=2B, \tag{111}$$

$$s(a+R_1)+ab+R_1R_2=2B, \tag{112}$$

$$s(a-R_1)+ab+R_1R_2=2B, \tag{113}$$

$$s(a-R_1)+ab-R_1R_2=2B, \tag{114}$$

где су R_1 и R_2 дефинисани формулама (110).

Из претходног се види да су од шест коефицијената s, a, b, A, B, C пет произвољни.

Нумерички пример. Једначина

$$y'' + (4\,e^{sx} + 7)\,y' + (3\,e^{2sx} + 5\,e^{sx} + 10)\,y = 0 \tag{S}$$

биће сводљива ако s има једну од следећих вредности:

$$-6, \quad -12, \quad -4, \quad -2.$$

Овим вредностима s одговарају четири диференцијалне једначине облика (S) које се своде респективно на ове системе:

1⁰ за $s = -6$ имамо:

$$y' - (e^{-6x} + 2)\,y = z,$$
$$z' + (3\,e^{-6x} + 5)\,z = 0;$$

2⁰ за $s = -12$ имамо:

$$y' + (e^{-12x} + 5)\,y = z,$$
$$z' + (3\,e^{-12x} + 2)\,z = 0;$$

3⁰ за $s = -4$ имамо:

$$y' + (3\,e^{-4x} + 2)\,y = z,$$
$$z' + (e^{-4x} + 5)\,z = 0;$$

4⁰ за $s = -2$ имамо:

$$y' + (3\,e^{-2x} + 5)\,y = z,$$
$$z' + (e^{-2x} + 2)\,z = 0.$$

14. Да би изрази били што једноставнији, слично као у првој глави, увешћемо два параметра: p и q.

Ставимо

$$\begin{aligned} A &= -p\,(a+p), \\ C &= -q\,(b+q), \end{aligned} \tag{115}$$

па услови (111) – (114) постају респективно:

$$(M_1) \equiv (a+p)\,s - 2\,pq - aq - bp = B,$$
$$(M_2) \equiv (a+p)\,s + ab + aq + bp + 2\,pq = B,$$
$$(M_3) \equiv -ps + ab + aq + bp + 2\,pq = B,$$
$$(M_4) \equiv -ps - aq - bp - 2\,pq = B.$$

На основу (115), формуле (106) – (109) добијају респективно ове облике у матричној форми:

I. *систем:*

$$M = \begin{Vmatrix} a+p & b+q \\ -p & -q \end{Vmatrix} \equiv M_1;$$

II. *систем:*

$$M = \begin{Vmatrix} a+p & -q \\ -p & b+q \end{Vmatrix} \equiv M_2;$$

III. *систем:*

$$M = \begin{Vmatrix} -p & b+q \\ a+p & -q \end{Vmatrix} \equiv M_3;$$

IV. *систем:*

$$M = \begin{Vmatrix} -p & -q \\ a+p & b+q \end{Vmatrix} \equiv M_4,$$

где је са M означена матрица:

$$M = \begin{Vmatrix} \lambda_1 & \mu_1 \\ \lambda_2 & \mu_2 \end{Vmatrix}.$$

За израз B дефинисан једном од формула (M_k) и за матрицу M_k са истим индексом казаћемо да су ***кореспондентни.***

15. На основу напред изнетих чињеница могућно је формулисати овај став:

Став V. *Дифененцијална једначина* (100), *под условом:*

$$\begin{aligned} A &= -p\,(a+p), \\ C &= -q\,(b+q) \\ B &= (M_k) \end{aligned} \tag{116}$$

(s, a, b, p, q = произвољни параметри)

сводљива је на систем линеарних једначина

$$\begin{aligned} y' + (\lambda_1\, e^{sx} + \mu_1)\, y &= z, \\ z' + (\lambda_2\, e^{sx} + \mu_2)\, z &= 0, \end{aligned} \tag{117}$$

где је матрица

$$M = \begin{Vmatrix} \lambda_1 & \mu_1 \\ \lambda_2 & \mu_2 \end{Vmatrix}$$

једнака матрици M_k која је у кореспонденцији са изразом $B = (M_k)$.

Овај став садржи у себи четири подстава с обзиром на то да је:

$$k = 1,\ 2,\ 3,\ 4.$$

Сада ћемо интегралити систем (117): из друге од тих једначина налази се:

$$z = \Lambda_1 \exp\left(-\frac{\lambda_2}{s} e^{sx} - \mu_2 x\right), \tag{118}$$

(Λ_1 = интеграциона константа).

Из прве од једначина (117), водећи рачуна о (118), добија се:

$$y = \Lambda_2 \exp\left(-\frac{\lambda_1}{s} e^{sx} - \mu_1 x\right) \tag{119}$$

$$+ \Lambda_1 \exp\left(-\frac{\lambda_1}{s} e^{sx} - \mu_1 x\right) \int \exp\left(\frac{\lambda_1 - \lambda_2}{s} e^{sx}\right) \cdot \exp\left[(\mu_1 - \mu_2) x\right] dx$$

(Λ_2 = интеграциона константа).

Ако је

$$s = \mu_1 - \mu_2,$$

квадратура у (119) може се извршити и тада је:

$$y = \Lambda_2 \exp\left(-\frac{\lambda_1}{s} e^{sx} - \mu_1 x\right) \tag{120}$$

$$+ \frac{\Lambda_1}{\lambda_1 - \lambda_2} \exp\left(-\frac{\lambda_1}{s} e^{sx} - \mu_1 x\right) \cdot \exp\left(\frac{\lambda_1 - \lambda_2}{s} e^{sx}\right),$$

где је

$$s = \mu_1 - \mu_2.$$

Решењу (120) може се дати овај облик:

$$y = e^{-\mu_1 x} \left[\Lambda_2 \exp\left(-\frac{\lambda_1}{s} e^{sx}\right) + \frac{\Lambda_1}{\lambda_1 - \lambda_2} \exp\left(-\frac{\lambda_2}{s} e^{sx}\right)\right]$$

$$(s = \mu_1 - \mu_2).$$

Ако је

$$\lambda_1 - \lambda_2 = 0,$$

тада (119) постаје:

$$y = \Lambda_2 \exp\left(-\frac{\lambda_1}{s} e^{sx} - \mu_1 x\right)$$

$$+ \frac{\Lambda_1}{\mu_1 - \mu_2} \exp\left(-\frac{\lambda_1}{s} e^{sx} - \mu_1 x\right) \cdot \exp\left[(\mu_1 - \mu_2) x\right]$$

$$(\mu_1 \neq \mu_2)$$

тј.

$$y = exp\left(-\frac{\lambda_1}{s}e^{sx}\right)\left(\Lambda_2 e^{-\mu_1 x} + \frac{\Lambda_1}{\mu_1 - \mu_2}e^{-\mu_2 x}\right). \tag{121}$$

У случају када је истовремено:

$$\lambda_1 = \lambda_2, \quad \mu_1 = \mu_2,$$

тада (119) добија следећи једноставан облик:

$$y = (\Lambda_1 x + \Lambda_2)\, exp\left(-\frac{\lambda_1}{s}e^{sx} - \mu_1 x\right). \tag{122}$$

16. H. Görtler[1]) посматрао је један партикуларни случај једначине (100), наиме случај када је:

$$s = 1$$

и показао је да једначина

$$y'' + (a e^{x} + b)\, y' + (A e^{2x} + B e^{x} + C)\, y = 0, \tag{123}$$

где је:

$$\begin{aligned} A &= -p\,(a + p), \\ B &= -aq - bp - 2pq - p, \\ C &= -q\,(b + q) \end{aligned} \tag{124}$$

(p, q, a, b = произвољни параметри)

има као партикуларно решење функцију

$$exp\,(p\,e^{x} + qx).$$

Görtler-ов случај обухваћен је нашим критеријумом интеграбилитета једначине (100) који је дат ставом V. Заиста, ако се у ставу V посматра случај

$$s = 1, \quad k = 4,$$

има се резултат који је дао Görtler.

Критеријум дат ставом V садржи исто тако, као партикуларне случајеве, разне резултате које су навели Craig, Conte, Görtler, Kamke и други.

---

[1]) *Ergänzungen zu* Kamke, *Differentialgleichungen: Lösungsmethoden und Lösungen (Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik*, Bd. 22, 1942 S. 233–234).

Тако, на пример, једначина

$$a^2y'' + a(a^2 - 2b\,e^{-ax})\,y' + b^2\,e^{-2ax}\,y = 0$$

$$(a,\ b = \mathrm{Const}),$$

коју је интегралио Craig[1]), сводљива је на систем:

$$y' - \left(\frac{b}{a}e^{-ax} - a\right)y = z,$$

$$z' - \frac{b}{a}e^{-ax}\,z = 0$$

$$(a \neq 0).$$

L. Conte[2]) је показао да је једначина

$$y'' + ay' + b\,e^{2ax}y = 0,$$

интеграбилна.

Та једначина сводљива је на систем:

$$y' + (\sqrt{-b}\,e^{ax} + a)\,y = z,$$

$$z' - \sqrt{-b}\,e^{ax}\,z = 0$$

Једначина[3])

$$y'' - (2\,e^x + 1)\,y' + e^{2x}y = 0,$$

коју су интегрирали Morris и Brown, сводљива је на систем

$$y' - e^x\,y = z,$$

$$z' - (e^x + 1)\,z = 0$$

или на систем

$$y' - (e^x + 1)\,y = z,$$

$$z' - e^x\,z = 0.$$

Диференцијалне једначине[4])

$$y'' + y' + e^{-2x}\,y = 0, \tag{125}$$

$$y'' - y' + e^{2x}\,y = 0 \tag{126}$$

такође су сводљиве.

---

[1]) Kamke I, S. 422, Gl. 2.90.

[2]) Kamke I, S. 641, Gl. 2.37b. *Видети* такође: *Publications mathématiques de l'Université de Belgrade*, t. 6—7, 1937—1938, p. 119—125.

[3]) Kamke I, S. 418, Gl. 2.63.

[4]) Kamke I, S. 412, Gl. 2.33, Gl. 2.34.

Једначина (125) може се свести на систем:

$$y' + i e^{-x} y = z,$$

$$z' - (i e^{-x} - 1) z = 0$$

или на систем

$$y' - i e^{-x} y = z,$$

$$z' + (i e^{-x} + 1) z = 0$$

$$(i = \sqrt{-1}).$$

Једначина (126) је своддљива на систем:

$$y' + i e^{x} y = z,$$

$$z' - (i e^{x} + 1) z = 0$$

или на систем

$$y' - i e^{x} y = z,$$

$$z' + (i e^{x} - 1) z = 0$$

$$(i = \sqrt{-1}).$$

17. Узмимо сада једначину

$$y'' + (a e^{sx} + b) y' + (B e^{sx} + C) y = 0, \tag{127}$$

која је специјалан случај једначине (100).

Применимо став V на једначину (127); овом приликом им ћемо да разликујемо четири случаја:

I. *случај*. Пошто је овде

$$A = 0,$$

имамо

$$-p (a + p) = 0.$$

За $p = 0$, има се

$$B = a (s - q),$$
$$C = -q (b + q),$$

и једначина (127), у томе случају, своди се на систем:

$$y' + [a e^{sx} + (b + q)] y = z,$$
$$z' - qz = 0.$$

За $p = -a$ налази се:

$$B = a(b+q)$$
$$C = -q(b+q)$$

и тада се једначина (127) своди на систем

$$y' + (b+q)\,y = z,$$
$$z' + (a\,e^{sx} - q)\,z = 0.$$

II. *случај*. Поступајући као у претходном случају, може се формулисати овај резултат:

1° Једначина (127), где је

$$B = a(s+b+q),$$
$$C = -q(b+q)$$

своди се на систем

$$y' + (a\,e^{sx} - q)\,y = z,$$
$$z' + (b+q)\,z = 0.$$

2° Једначина (127), где је

$$B = -aq,$$
$$C = -q(b+q)$$

своди се на систем:

$$y' - qy = z,$$
$$z' + (a\,e^{sx} + b + q)\,z = 0.$$

III. *случај*. 1° Једначина (127) у којој је

$$B = a(b+q),$$
$$C = -q(b+q)$$

своди се на систем:

$$y' + (b+q)\,y = z,$$
$$z' + (a\,e^{sx} - q)\,z = 0.$$

2° Једначина (127) у којој је:

$$B = a(s-q),$$
$$C = -q(b+q)$$

своди се на систем:

$$y' + [a\,e^{sx} + (b+q)]\,y = z,$$
$$z' - qz = 0.$$

IV. *случај.* 1° Једначина (127), где је

$$B = -aq,$$
$$C = -q(b+q)$$

своди се на систем:

$$y' - qy = z,$$
$$z' + (a e^{sx} + b + q) z = 0.$$

2° Једначина (127), где је

$$\begin{aligned} B &= a(s+b+q), \\ C &= -q(b+q), \end{aligned} \tag{128}$$

своди се на систем:

$$y' + (a e^{sx} - q) y = z,$$
$$z' + (b + q) z = 0.$$

У сва четири горе посматрана случаја:

a, b, p, q = произвољни параметри.

Görtler[1]) је показао да је једначина

$$y'' + (a e^x + b) y' + (B e^x + C) y = 0$$

интеграбилна ако је

$$B = a(1+b+q),$$
$$C = -q(b+q).$$

Овај резултат је садржан, као партикуларни случај, у нашем четвртом случају. Заиста, стављајући $s = 1$ у формулама (128), добија се управо Görtler-ов случај.

Ако се претпостави да је $B \neq 0$, закључује се да једначина[2])

$$y'' + by' + (B e^x + C) y = 0$$

није сводљива у прецизираном смислу.

Исти је случај и са једначином[3])

$$y'' + B e^{sx} y = 0.$$

---

[1]) Görtler, S. 233, Gl. 4. (Та расправа је раније цитирана).
[2]) Kamke I, S. 641, Gl. 2.37a.
[3]) Kamke I, S. 403, Gl. 2.17.

Д. С. МИТРИНОВИЧ

СПОСОБ ОБРАЗОВАНИЯ КРИТЕРИУМА ИНТЕГРИРУЕМОСТИ ЛИНЕЙНЫХ ДИФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ, С КОЭФФИЦИЕНТАМИ, ИМЕЮЩИМИ НАПЕРЕД ДАННУЮ ФОРМУ

(*Вывод*)

1. Рассматриваем линейное диференциальное уравнение порядка n:

$$\varphi_0 y^{(n)} + \varphi_1 y^{(n-1)} + \cdots + \varphi_{n-1} y' + \varphi_n y = 0, \tag{1}$$

где

$$\varphi_k \qquad (k=0,\ 1,\ 2, \ldots, n)$$

являются определенными функциями переменного x.

Одновременно рассматриваем систему линейных уравнений первого порядка

$$\begin{gathered} f_{k1}\, y'_{k-1} + f_{k2}\, y_{k-1} = y_k\,, \\ f_{n1}\, y'_{n-1} + f_{n2}\, y_{n-1} = 0 \\ (y_0 = y; \quad k=1,\ 2, \ldots, n-1), \end{gathered} \tag{2}$$

где f_{kj} представляют функции переменного x, удовлетворяющие следующим условиям:

$$1^0 \quad f_{k1} \neq 0 \qquad (k=1,\ 2, \ldots, n);$$

$$2^0 \quad f_{kj} \qquad (k=1,\ 2, \ldots, n; \quad j=1,\ 2)$$

являются функциями непрерывными и диференцируемыми.

Если исключим $(n-1)$ функцию

$$y_1,\ y_2, \ldots, y_{n-1}$$

из n уравнений (2), получим одно линейное уравнение порядка n

$$\Phi_0 y^{(n)} + \Phi_1 y^{(n-1)} + \cdots + \Phi_{n-1} y' + \Phi_n y = 0 \tag{3}$$

в котором функции

$$\Phi_k = \Phi_k(x)$$

$$(k=0,\ 1,\ 2, \ldots, n)$$

представляют многочлены по

$$f_{kj},\ f'_{kj}, \ldots, f^{(n-1)}_{kj}.$$

Каждое уравнение (1), преобразуемое в одну систему вида (2), называется **п р и в о д и м ы м.**[1])

---

1) Об общем понятии приводимости диференциальных уравнений см.:

1^0 P. Painlevé, *Leçons sur la théorie analytique des équations différentielles, professées à Stockholm*, Paris, 1897, p. 487;

2^0 E. Goursat, *Propriétés générales de l'équation d'Euler et de Gauss, Actualités scientifiques et industrielles*, № 333, Paris 1936, p. 70.

Надлежащим выбором произвольных функций f_{kj}, можем систематическим образом составить уравнения типа (1), коэффициенты которых будут функциями от x:

$$\varphi_0, \quad \varphi_1, \ldots \varphi_n$$

и будут заранее определенного вида. Это исполнимо различными способами, что подробно показано в тексте на сербском языке.

В виду того, что систему (2) можно всегда интегрировать при помощи квадратур, то будет возможна и интеграция уравнения (3), полученного, исходя из системы (2).

Предшествующий результат можно обобщить, если вместо выражений вида

$$a_0(x)y' + a_1(x)y,$$

взять за первую часть реляций (2) выражения вида:

$$A_0(x)\,y^{(k)} + A_1(x)\,y^{(k-1)} + \cdots + A_{k-1}(x)\,y' + A_k(x)\,y$$

(k=целое положительное число).

2. Систему (2) можно использовать, например, для изложения всей теории интеграции линейных диференциальных уравнений с постоянными коэффициентами, потому что эти уравнения приводимы в том смысле, как мы это уже определили.

Если уравнение (1) приводимо, будет приводимо тоже и уравнение

$$\varphi_0 y^{(n)} + \varphi_1 y^{(n-1)} + \cdots + \varphi_n y = \omega(x) \tag{4}$$

и тогда система (2) примет вид ($y_0 = y$)

$$\begin{aligned} f_{k1} y'_{k-1} + f_{k2} y_{k-1} &= y_k, \\ f_{n1} y'_{n-1} + f_{n2} y_{n-1} &= \omega(x) \\ (k = 1, 2, \ldots, n-1) \end{aligned} \tag{5}$$

Если уравнение (4) приводимо, вместо того, что бы применить прием вариации постоянного, можем использовать способ состоящийся в интеграции системы (5), соответствующей уравнению (4). Рассматриваемая интеграция исполняется, исходя от последнего уравнения системы, приближаясь постепенно к первому уравнению.

$$f_{11}\, y' + f_{12}\, y = y_1.$$

В статье на сербском языке детально применен указанный способ к уравнениям вида:

$$y'' + (ax + b)\,y' + (Ax^2 + Bx + C)\,y = 0,$$

$$y'' + \left(a\, e^{sx} + b\right) y' + \left(A\, e^{2sx} + B\, e^{sx} + C\right) y = 0,$$

где s, a, b, A, B, C представляют постоянные величины, и показано, что многочисленные случаи интегрируемости, которые были раньше известны, истекают из одного общего источника.

D. S. MITRINOVITCH

PROCÉDÉ DE FORMATION DES CRITÈRES D'INTÉGRABILITÉ DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES LINÉAIRES À COEFFICIENTS AYANT DES FORMES DONNÉES À L'AVANCE

(*Résumé*)

I.

1. On envisage l'équation différentielle linéaire d'ordre n:

$$\varphi_0\, y^{(n)}+\varphi_1\, y^{(n-1)}+\cdots+\varphi_{n-1}\, y'+\varphi_n\, y=0, \tag{1}$$

où[1])

$$\varphi_k \qquad (k=0,\ 1,\ 2,\ldots,n)$$

sont des fonctions données de la variable x.

Parallèlement, on considère le système d'équations linéaires du premier ordre:

$$\begin{aligned} &f_{k1}\, y'_{k-1}+f_{k2}\, y_{k-1}=y_k,\\ &f_{n1}\, y'_{n-1}+f_{n2}\, y_{n-1}=0,\\ &(y_0=y;\quad k=1,\ 2,\ldots,n-1), \end{aligned} \tag{2}$$

où f_{kj} sont des fonctions de x satisfaisant aux conditions suivantes:

1⁰ $\quad f_{k1}\neq 0 \qquad (k=1,\ 2,\ldots,n)$;

2⁰ $\quad f_{kj} \qquad (k=1,\ 2,\ldots,n;\quad j=1,\ 2)$

sont des fonctions continues et dérivables.

Si l'on élimine les $(n-1)$ fonctions

$$y_1,\ y_2,\ldots,y_{n-1}$$

entre les n équations (2), on trouve une équation linéaire d'ordre n:

$$\Phi_0 y^{(n)}+\Phi_1 y^{(n-1)}+\cdots+\Phi_{n-1} y'+\Phi_n\, y=0, \tag{3}$$

où les fonctions

$$\Phi_k=\Phi_k(x)$$
$$(k=0,\ 1,\ 2,\ldots,n)$$

sont des polynômes en

$$f_{kj},\ f'_{kj},\ f''_{kj},\ldots,f_{kj}^{(n-1)}.$$

---

1) Dans cette étude les accents désignent des dérivées prises par rapport à la variable x.

Toute l'équation (1), transformable en un système de la forme (2), s'appele *réductible*[1]).

Par un choix convenable des fonctions arbitraires f_{kj}, on peut construire, d'une manière systématique, des équations du type (1), dont les coefficients – fonctions de x:

$$\varphi_0, \quad \varphi_1, \ldots, \varphi_n$$

auront des formes assignées par avance. Cela peut se réaliser de diverses manières, ce qui sera illustré dans des pages suivantes.

Le système (2) étant toujours intégrable par quadratures, il en sera de même de l'équation (3), fournie à partir du système (2).

Le résultat précédent peut être généralisé, lorsque dans le premier membre des relations (2) on considère des expressions de la forme

$$A_0(x)\, y^{(k)} + A_1(x)\, y^{(k-1)} + \cdots + A_{k-1}(x)\, y' + A_k(x)\, y$$

$$(k = \text{entier positif})$$

au lieu des expressions de la forme

$$a_0(x)\, y' + a_1(x)\, y.$$

2. Le système (2) peut être employé, par exemple, dans le but d'exposer toute la théorie d'intégration des équations différentielles linéaires à coefficients constants, car ces équations-ci sont réductibles dans le sens déjà précisé.

Si l'équation (1) est réductible, il en est de même de l'équation

$$\varphi_0\, y^{(n)} + \varphi_1\, y^{(n-1)} + \cdots + \varphi_n\, y = \omega(x), \tag{4}$$

et dans ce cas le système (2) sera de la forme ($y_0 = y$)

$$\begin{gathered} f_{k1}\, y'_{k-1} + f_{k2}\, y_{k-1} = y_k, \\ f_{n1}\, y'_{n-1} + f_{n2}\, y_{n-1} = \omega(x) \\ (k = 1, 2, \ldots, n-1). \end{gathered} \tag{5}$$

Dans le cas où l'équation (4) est réductible, on peut utiliser, au lieu de la méthode de variation des constantes arbitraires, le procédé consistant dans l'intégration du système (5) qui correspond à l'équation (4). L'intégration en question s'effectue en partant de la dernière équation du système (5) et en continuant de proche en proche vers la première équation

$$f_{11}\, y' + f_{12}\, y = y_1. \tag{6}$$

---

1) Sur la notion générale de réductibilité des équations différentielles, *cf.* par exemple:

1⁰ P. Painlevé, *Leçons sur la théorie analytique des équations différentielles, professées à Stockholm,* Paris, 1897, p. 487;

2⁰ E. Coursat, *Propriétés générales de l'équation d'Euler et de Gauss,* Actualités scientifiques et industrielles, № 333, Paris, 1936, p. 70.

II.

3. Comme première application des remarques indiquées, on propose de trouver des critères d'intégrabilité par quadratures de l'équation linéaire du second ordre

$$y''+(ax+b)y'+(\alpha x^2+\beta x+\gamma)y=0, \tag{7}$$

où a, b, α, β, γ désignent des constantes arbitraires.

Simultanément avec l'équation (7) on considère le système intégrable

$$\begin{aligned} &f(x)\,y'+g(x)\,y=z,\\ &z'+h(x)\,z=0, \end{aligned} \tag{8}$$

d'où il provient, par l'élimination de z,

$$f\,y''+(f'+g+fh)\,y'+(g'+gh)y=0. \tag{9}$$

Une condition suffisante pour que l'équation (9) soit de la forme (7) sera:

$$\begin{aligned} f(x) &\equiv 1,\\ g(x) &\equiv \lambda_1 x+\mu_1,\\ h(x) &\equiv \lambda_2 x+\mu_2, \end{aligned} \tag{10}$$

où λ_1, λ_2, μ_1, μ_2 sont des constantes arbitraires.

L'équation (9), en vertu des expressions (10), prend la forme

$$\begin{aligned} &y''+[(\lambda_1+\lambda_2)\,x+(\mu_1+\mu_2)]\,y'\\ &+[\lambda_1\,\lambda_2\,x^2+(\lambda_1\,\mu_2+\lambda_2\,\mu_1)\,x+(\mu_1\,\mu_2+\lambda_1)]\,y=0. \end{aligned} \tag{11}$$

De la comparaison des équations (7) et (11), on tire

$$\begin{aligned} \lambda_1+\lambda_2&=a,\\ \lambda_1\,\lambda_2&=\alpha,\\ \mu_1+\mu_2&=b,\\ \mu_1\,\mu_2+\lambda_1&=\gamma,\\ \lambda_1\,\mu_2+\lambda_2\,\mu_1&=\beta. \end{aligned} \tag{12}$$

Lorsqu'on désigne par a, b des constantes arbitraires et par p, q deux paramètres introduits pour que les formules soient plus commodes, on peut, après la résolution du système (12), énoncer les résultats suivants:

Proposition I. *L'équation* (7), *dans le cas où*

$$\begin{aligned} \alpha&=-p\,(a+p),\\ \beta&=-aq-bp-2pq,\\ \gamma&=a+p-q\,(b+q), \end{aligned}$$

est réductible au système intégrable

$$\begin{aligned} &y'+[(a+p)\,x+(b+q)]\,y=z,\\ &z'-(px+q)\,z=0. \end{aligned}$$

Proposition II. *L'équation* (7), *avec*

$$\alpha = -p\,(a+p),$$
$$\beta = (a+p)\,(b+q)+pq,$$
$$\gamma = a+p-q\,(b+q),$$

est réductible au système intégrable

$$y' + [(a+p)\,x-q]\,y = z,$$
$$z' + [-px + (b+q]\,z = 0.$$

Proposition III. *L'équation* (7), *avec*

$$\alpha = -p\,(a+p),$$
$$\beta = (a+p)(b+q)+pq,$$
$$\gamma = -p-q\,(b+q),$$

est réductible au système intégrable

$$y' + [-px+(b+q)]\,y = z,$$
$$z' + [(a+p)\,x-q]\,z = 0.$$

Proposition IV. *L'équation* (7), *où*

$$\alpha = -p(a+p),$$
$$\beta = -aq-bp-2pq,$$
$$\gamma = -p-q\,(b+q),$$

est réductible au système intégrable

$$y' - (px+q)\,y = z,$$
$$z' + [(a+p)\,x + (b+q)]\,z = 0.$$

4. L'utilité du procédé indiqué, fournissant des critères d'intégrabilité, s'est confirmé déjà par l'équation (7). Les résultats formulés dans les quatre propositions précitées ne se trouvent pas dans le Recueil des équations différentielles de Kamke[1]). D'autre part, de nombreuses équations différentielles particulières du type (7), indiquées chez Kamke, jouissent de la propriété suivante:

1⁰ Elles sont réductibles dans le sens adopté;

2⁰ Elles présentent des cas particuliers dérivant d'une source commune, donnée dans cette étude[2]).

A titre d'exemple, prenons l'équation différentielle:

$$y'' + xy' + (\alpha x^2 + \gamma)\,y = 0 \tag{13}$$

1) E. Kamke, *Differentialgleichungen: Lösungsmethoden und Lösungen,* Bd. I, 3. Auflage, Leipzig, 1944; *cf.* particulièrement p. 413—417, p. 641.—Dans la suite, ce Traité sera cité, en abrégé, par Kamke.

2) Ceci est avec détail développé dans le texte serbe de cette étude. *Voir,* particulièrement, les §§ 9 11 en liaison avec le § 2.

présentant un cas particulier de l'équation (7) pour

$$a=1, \quad b=0, \quad \beta=0.$$

Les cas d'intégrabilité connus de l'équation (13), d'après Kamke[1]), sont les deux suivants:

1⁰ $\alpha=\frac{1}{4}, \quad \gamma=\frac{1}{2}$ (cas de Goldscheider);

2⁰ $\alpha=\frac{1}{4}, \quad \gamma\neq\frac{1}{2}$ (cas de Kamke).

En appliquant à l'équation (13) la proposition I, formulée précédemment, on fournit les résultats suivants qui renferment ceux de Goldscheider et de Kamke, comme des cas particuliers:

1⁰ *Lorsque la condition*

$$\alpha=\gamma(1-\gamma)$$

est satisfaite, l'équation (13), *avec*

$$\alpha=-p(1+p),$$

$$\gamma=1+p$$

(p=paramètre arbitraire)

est réductible au système intégrable

$$y'+(1+p)xy=z,$$

$$z'-pxz=0.$$

Au cas particulier $\alpha=\frac{1}{4}$ correspond $\gamma=\frac{1}{2}\left(\text{ici } p=-\frac{1}{2}\right)$, ce qui est le résultat de Goldscheider;

2⁰ *Lorsqu'on a:*

$$\alpha=\frac{1}{4}, \quad \gamma=\frac{1}{2}-q^2$$

(q=paramètre arbitraire),

l'équation correspondante (13) *est réductible au système intégrable*

$$y'+\left(\frac{1}{2}x+\sqrt{\frac{1}{2}-\gamma}\right)y=z,$$

$$z'+\left(\frac{1}{2}x-\sqrt{\frac{1}{2}-\gamma}\right)z=0,$$

et c'est précisément le cas de Kamke.

Par conséquent, on voit que les équations de Goldscheider et de Kamke sont réductibles et que ces deux cas particuliers de l'équation (13) dérivent aussi d'une source commune.

---

1) Kamke, p. 641.

5. Relativement à l'équation différentielle

$$y''+(a\,e^{sx}+b)\,y'+(A\,e^{2sx}+B\,e^{sx}+C)\,y=0, \tag{14}$$

où a, b, s, A, B, C sont des constantes arbitraires, on énonce le résultat suivant:

Proposition V. *Les coefficients* a *et* b *désignant des constantes arbitraires,* A *et* C *étant de la forme*

$$A=-p\,(a+p),$$

$$C=-q\,(b+q),$$

où p *et* q *désignent deux paramètres arbitraires, l'équation* (14) *est réductible:*

1⁰ *au système intégrable*

$$y'+\left[(a+p)\,e^{sx}+(b+q)\right]y=z,$$

$$z'-\left(p\,e^{sx}+q\right)z=0,$$

dans le cas où

$$B=s\,(a+p)-2\,pq-aq-bp;$$

2⁰ *au système intégrable*

$$y'+\left[(a+p)\,e^{sx}-q\right]y=z,$$

$$z'+\left[-pe^{sx}+(b+q)\right]z=0,$$

dans le cas où

$$B=s\,(a+p)+ab+aq+bp+2\,pq;$$

3⁰ *au système intégrable*

$$y'+\left[-pe^{sx}+(b+q)\right]y=z,$$

$$z'+\left[(a+p)\,e^{sx}-q\right]z=0,$$

dans le cas où

$$B=-sp+ab+aq+bp+2\,pq;$$

4⁰ *au système intégrable*

$$y'-\left(pe^{sx}+q\right)y=z,$$

$$z'+\left[(a+p)\,e^{sx}+(b+q)\right]z=0,$$

dans le cas où

$$B=-sp-aq-bp-2\,pq.$$

Le procédé en question, appliqué à l'équation (14), a fourni la proposition V, ce qui met en évidence de nouveau:

1⁰ que ce procédé pourrait conduire à des résultats de plus en plus intéressants, lorsqu'on l'appliquait d'une manière systématique;

2^0 que le même procédé est notamment convenable pour un complètement du Recueil de Kamke qui s'est montré déjà si utile dans des recherches relatives à des sciences techniques et appliquées.

6. D'autres critères d'intégrabilité de l'équation (7), en dehors de ceux cités plus haut, s'obtiendront en partant de l'équation (9), dans laquelle les fonctions f, g, h ont, par exemple, les expressions suivantes:

$$\begin{aligned} f(x) &\equiv (x-k_1)(x-k_2)\dots(x-k_s), \\ g(x) &\equiv \lambda_1 x^{s+1} + \lambda_2 x^s + \cdots + \lambda_{s+1} x + \lambda_{s+2}, \\ h(x) &\equiv \mu_1 x + \mu_2 \end{aligned} \tag{15}$$

où les coefficients:

$$\begin{aligned} &k_1, k_2, \dots, k_s; \\ &\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{s+2}; \\ &\mu_1, \mu_2 \end{aligned} \tag{16}$$

sont des constantes arbitraires.

En choisissant les paramètres (16) et le nombre naturel s sous la condition que les polynômes

$$f' + g + fh, \quad g' + gh,$$

déterminés par (15), soient divisibles sans reste par le polynôme f, on trouvera de nouveaux critères d'intégrabilité de l'équation (7).

Nous allons étudier ceci et d'autres questions connexes dans un autre travail.